

Analyse de sensibilité et robustesse paramétrique d'un modèle flou successoral en contexte pluraliste : une approche par simulation pour la médiation des conflits d'héritage en République Démocratique du Congo

« *Sensitivity analysis and parametric robustness of a fuzzy inheritance model in a pluralistic context : a simulation approach for mediating inheritance disputes in the Democratic Republic of Congo* »

KATEMBO MUKOKOMA¹, NGOIE CALEB CALEB²

(1) ISP/ Muhangi

(2) Centre de Recherche sur l'Enseignement de la Mathématique, CREM GOMBE/KINSHASA

RÉSUMÉ

Cet article propose une analyse approfondie de la sensibilité et de la robustesse paramétrique d'un modèle d'aide à la décision successorale basé sur la logique floue [1], [2], dans un contexte pluraliste caractérisé par l'incertitude, la variabilité des normes et la complexité des relations généalogiques [3]. Le modèle étudié intègre un ensemble structuré de variables d'entrée, combinées à travers un score global pondéré et une base de règles floues, afin de produire une décision relative à la répartition successorale.

L'étude se concentre sur l'impact des paramètres internes du système, notamment les pondérations des règles, les coefficients du score global et les paramètres des fonctions d'appartenance [4], sur la stabilité des décisions produites. Une formalisation mathématique du modèle est proposée, permettant de dériver des indicateurs de sensibilité locale et normalisée, ainsi que des mesures globales de stabilité [5].

Une attention particulière est accordée à la stabilité du classement des héritiers, analysée à travers des configurations paramétriques multiples. Des indicateurs tels que les marges décisionnelles, les gradients de sensibilité et les seuils d'inversion sont introduits afin de caractériser la robustesse du classement face aux perturbations des paramètres [6]. L'étude met en évidence que la stabilité du modèle dépend fortement de l'équilibre entre les pondérations, la calibration des coefficients et la forme des fonctions d'appartenance.

Les résultats montrent que certaines configurations paramétriques peuvent induire des inversions de classement pour de faibles variations, révélant des zones de fragilité décisionnelle. À l'inverse, des marges suffisantes entre les scores des héritiers garantissent une robustesse accrue du système. L'approche proposée permet ainsi d'identifier les situations critiques et d'améliorer la fiabilité du processus décisionnel [7].

En conclusion, ce travail fournit un cadre analytique rigoureux pour l'évaluation de la stabilité des modèles flous appliqués à la succession, et contribue à renforcer leur pertinence dans des contextes complexes où les décisions doivent concilier des critères multiples et parfois contradictoires [8].

Mots-clés. Logique floue, analyse de sensibilité, calibration paramétrique, succession, pluralisme juridique, système d'aide à la décision, médiation, République Démocratique du Congo.

SUMMARY

This article offers an in-depth analysis of the sensitivity and parametric robustness of a fuzzy logic-based inheritance decision-making model [1], [2] within a pluralistic context characterized by uncertainty, variable norms, and complex genealogical relationships [3]. The model incorporates a structured set of input variables, combined through a weighted global score and a fuzzy rule base, to produce a decision regarding inheritance distribution.

The study focuses on the impact of the system's internal parameters, including rule weights, global score coefficients, and membership function parameters [4], on the stability of the resulting decisions. A mathematical formalization of the model is proposed, allowing for the derivation of local and normalized sensitivity indicators, as well as global stability measures [5].

Particular attention is paid to the stability of the heir ranking, analyzed through multiple parametric configurations. Indicators such as decision margins, sensitivity gradients, and inversion thresholds are introduced to characterize the robustness of the ranking in the face of parameter perturbations [6]. The study highlights that the model's stability depends strongly on the balance between weights, coefficient calibration, and the shape of membership functions.

The results show that certain parametric configurations can induce ranking inversions for small variations, revealing areas of decisional fragility. Conversely, sufficient margins between heirs' scores guarantee increased system robustness. The proposed approach thus makes it possible to identify critical situations and improve the reliability of the decision-making process [7].

In conclusion, this work provides a rigorous analytical framework for evaluating the stability of fuzzy models applied to succession and contributes to strengthening their relevance in complex contexts where decisions must reconcile multiple and sometimes contradictory criteria [8].

Keywords. Fuzzy logic, sensitivity analysis, parametric calibration, succession, legal pluralism, decision support system, mediation, Democratic Republic of Congo.

1. INTRODUCTION

1.1. Contexte et problématique

Le partage d'héritage sans testament, ou succession ab intestat, constitue en République Démocratique du Congo une source majeure de conflits familiaux et judiciaires [9]. Ce phénomène s'inscrit dans un cadre de pluralisme normatif où trois systèmes juridiques coexistent et interagissent de manière complexe : le droit civil codifié (Code de la famille), les droits coutumiers (systèmes patrilinéaire, matrilinéaire et bilatéral) et les pratiques sociales contemporaines issues de l'urbanisation et de la modernisation [10], [11].

Cette pluralité normative génère des incertitudes fondamentales que les modèles décisionnels binaires traditionnels (héritier/non-héritier) ne peuvent résoudre adéquatement. En effet, dans les pratiques successorales congolaises, les notions de « parenté proche », de « légitimité coutumière » ou de « dépendance économique »

ne se laissent pas enfermer dans des catégories dichotomiques [12]. Elles relèvent plutôt d'un continuum où la gradualité et l'ambiguïté sont la règle [3].

Face à ce constat, les systèmes experts flous offrent un cadre théorique prometteur pour formaliser le raisonnement graduel propre aux arbitrages coutumiers [1], [2]. Développé dans le cadre d'une recherche antérieure, le modèle successoral flou « partage d'héritage sans testament » intègre cinq types de relations généalogiques (filiation biologique, filiation sociale, alliance, dépendance économique, reconnaissance coutumière) dans un graphe multidimensionnel et calcule un score successoral global combinant proximité généalogique, légitimité juridique, dépendance économique et reconnaissance coutumière.

Cependant, le déploiement effectif de ce modèle se heurte à une difficulté méthodologique majeure : la calibration de ses paramètres [5]. En effet, tout modèle flou intègre des paramètres dont la valeur influence directement les résultats produits. Il s'agit notamment des pondérations des relations ω_r (pour R_1 à R_5) et des coefficients α , β , γ , δ du score global, avec les contraintes $\sum \omega_r = 1$ et $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$ [4]. Ces paramètres comportent inévitablement une part de subjectivité, qu'elle provienne de l'expertise humaine mobilisée pour leur détermination ou des observations empiriques sur lesquelles ils s'appuient [13].

1.2. État de l'art sur l'analyse de sensibilité en intelligence artificielle floue

L'analyse de sensibilité constitue un champ de recherche établi dans le domaine de la modélisation scientifique. Saltelli et al. [5] en ont posé les fondements méthodologiques, distinguant les méthodes de criblage (screening) des méthodes quantitatives globales. Dans le domaine spécifique des systèmes flous, Campolongo et al. [6] ont adapté ces méthodes pour évaluer l'impact des variations paramétriques sur les sorties des modèles.

Pourtant, force est de constater que très peu d'études ont appliqué ces techniques d'analyse de sensibilité aux systèmes experts flous déployés dans des contextes socialement sensibles [14]. En particulier, dans le domaine de l'aide à la décision juridique, la littérature existante se concentre sur la validation externe (comparaison avec des décisions humaines) sans interroger systématiquement la robustesse interne des modèles face aux variations des paramètres subjectifs [15].

Melynda et al. [7] ont appliqué la logique floue de Mamdani pour déterminer les droits successoraux d'enfants adoptés en Indonésie, mais leur analyse ne comporte pas d'étude de sensibilité paramétrique. Kasongo [9] a identifié la nécessité d'un outil d'aide à la décision pour les conflits successoraux au Katanga sans proposer de modélisation formelle. Kalonji et Tshibanda [16] ont proposé une approche floue pour la répartition équitable, mais sans formalisation généalogique explicite ni analyse de la robustesse.

Ainsi, une lacune scientifique persiste : l'absence d'une analyse systématique de la sensibilité et de la robustesse des modèles flous appliqués aux successions en contexte pluraliste [17]. Cette lacune est d'autant plus critique que ces modèles sont destinés à être utilisés dans des situations de médiation où la confiance des parties dans l'outil est conditionnée par sa transparence et sa stabilité [18].

1.3. Position du problème de calibration

La question centrale qui guide cette recherche est : dans quelle mesure les conclusions du modèle successoral flou sont-elles sensibles aux variations raisonnables de ses paramètres [5] ? Cette question se décline en trois sous-questions opérationnelles :

1. Sensibilité aux pondérations des relations : comment les scores et classements des héritiers évoluent-ils lorsque les poids ω_r attribués aux cinq types de relations (R_1 à R_5) varient dans des limites plausibles ?

2. Sensibilité aux coefficients du score global : comment les décisions du système sont-elles affectées par des modifications des coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ qui pondèrent respectivement la proximité généalogique, la légitimité successorale, la dépendance économique et la reconnaissance coutumière ?

3. Sensibilité aux fonctions d'appartenance : dans quelle mesure les variations des bornes des fonctions triangulaires modifient-elles les résultats [3] ?

1.4. Objectifs de l'article

Le présent article vise à apporter des éléments de réponse à ces questions à travers une analyse systématique de sensibilité et de robustesse [6]. Plus spécifiquement, cette recherche se fixe comme objectifs spécifiques suivants :

- Quantifier la sensibilité du modèle successoral flou aux variations de ses principaux paramètres ($\omega_r, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, bornes des fonctions d'appartenance) à l'aide d'indicateurs statistiques appropriés (coefficient de variation, corrélation de Spearman).
- Évaluer la robustesse du classement des héritiers face à différentes configurations paramétriques, en identifiant les seuils de tolérance au-delà desquels l'ordre des ayants droit se modifie.
- Identifier les seuils d'inversion critiques, c'est-à-dire les valeurs paramétriques pour lesquelles deux héritiers échangent leurs positions dans le classement successoral [6].

2. CADRE MÉTHODOLOGIQUE

2.1. Présentation synthétique du modèle successoral flou

2.1.1. Structure du graphe généalogique flou

- Un graphe généalogique flou \tilde{G} est un quadruplet $\tilde{G} = (I, R, T, M)$ où [1], [3] :

- $I = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$: ensemble des individus
- $R = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$: types de relations
- $T : I \times I \times R \rightarrow [0,1]$: fonction d'appartenance
- M : matrice d'agrégation

- Cinq types de relations sont définis [3] :

R_1 : Filiation biologique

$$u_{R_1}(i, j) = \begin{cases} f_{bio}(i, j) & \text{si } i \text{ est ascendant} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $f_{bio}(i, j)$ intègre le degré de certitude de la filiation (acte, notoriété, présomption).

R_2 : Filiation sociale

$$u_{R_2}(i, j) = \begin{cases} f_{soc}(i, j) & \text{si } i \text{ a élevé } j \text{ ou } j \text{ a été confié à } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $f_{soc}(i, j)$ fonction de la durée, de l'intensité et de la reconnaissance sociale.

R_3 : Alliance (mariage/union)

$$u_{R_3}(i, j) = \begin{cases} h_{all}(i, j) & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont ou étaient unis} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $h_{all}(i, j)$ dépendant du type d'union (civil, coutumier, libre) et de sa reconnaissance.

R₄ : Dépendance économique

$u_{R_4}(i, j) = k_{dep}(i, j) \in [0,1]$ mesurant l'intensité de la dépendance économique de j vis-à-vis de i.

R₅ : Reconnaissance coutumière

$u_{R_5}(i, j) = l_{rec}(i, j) \in [0,1]$ représentant le degré de reconnaissance sociale ou coutumière du lien entre i et j.

La matrice d'adjacence globale M est obtenue par agrégation pondérée [4] :

$$M[i, j] = \max(\omega_r \times M_r[i, j]) \text{ avec } r \in R$$

où $\omega_r \in [0,1]$ sont des poids associés à chaque type de relation, avec $\sum_{r \in R} \omega_r = 1$.

2.1.2. Fonctions d'appartenance paramétriques

Les fonctions d'appartenance traduisent les évaluations qualitatives (issues de l'expertise ou des observations) en valeurs numériques. Nous proposons des fonctions paramétriques qui permettent d'ajuster le modèle à différents contextes (régions, ethnies, types de relations).

Une fonction d'appartenance paramétrique est une application :

$u : X \times \theta \rightarrow [0,1]$ où X est l'univers de discours et θ un espace de paramètres.

a. Fonction pour filiation biologique

La filiation biologique dépend principalement du mode de preuve disponible.

Modèle à seuils :

$u_{R_1}(p)$ est : 1.0 si preuve légale (acte) ; 0.9 si preuve par notoriété forte ; 0.8 si reconnaissance par le père ; 0.7 si présomptions concordantes ; 0.5 si témoignages contradictoires ; 0.3 si simples indices ; 0.0 si absence de preuve ;

Modèle continu (avec indice de preuve $p \in [0,1]$) :

$$u_{R_1}(p) = \frac{p}{p + \alpha(1-p)} \text{ où } \alpha \text{ est un paramètre de sévérité}$$

b. Fonction pour filiation sociale

La filiation sociale dépend de la durée et de l'intensité de la relation.

Modèle à deux facteurs :

$$u_{R_2}(d, a) = \beta \times \frac{d}{d + d_0} \times \frac{a}{a_{max}} \text{ où :}$$

- d : durée de vie commune (en années)
- a : âge de début de la relation
- d₀ : constante de normalisation
- a_{max} : âge maximal de début

c. Fonction pour l'alliance

L'alliance dépend du type d'union et de sa reconnaissance.

Modèle discret : $u_{R_3}(p)$ est 1.0 si mariage civil + coutumier ; 0.9 si mariage civil seul ; 0.8 si mariage coutumier formalisé ; 0.7 si mariage coutumier simple ; 0.6 si union libre avec enfants ; 0.5 si union libre reconnue ; 0.3 si union libre non reconnue ; 0.0 si pas d'union .

d. Fonctions pour la dépendance économique (R₄)

La dépendance économique peut être mesurée par le ratio des revenus ou le niveau de soutien. Modèle proportionnel : $u_{R_3}(S) = \min(1, \frac{S}{S_0})$

où s est le montant annuel du soutien (en unités monétaires) et S₀ un seuil de saturation.

Variante avec durée : $u_{R_4}(s, d) = \min(1, \frac{s}{s_0}) \times \frac{d}{d + d_0}$

e. Fonctions pour la reconnaissance coutumière (R₅)

La reconnaissance coutumière est une évaluation qualitative que nous quantifions par une échelle ordinale.

Modèle à 5 niveaux : $u_{R_5}(n) = \frac{n-1}{4}$, pour $n = 1,2,3,4,5$

Où : $n=1$: non reconnu ; $n=2$: faiblement reconnu ; $n=3$: moyennement reconnu ; $n=4$: fortement reconnu ; $n=5$: très fortement reconnu.

2.1.3. Agrégation des relations multiples

Un même couple (i,j) peut être relié par plusieurs types de relations (ex: i est à la fois père biologique et soutien économique de j). Il faut agréger ces informations pour obtenir une mesure globale de la force du lien.

a. Agrégation par maximum pondéré

Agrégation par maximum pondéré :

$u_{agr}(i, j) = \max(\omega_r \times u_r(i, j))$ avec $\sum_r \omega_r = 1$, cette agrégation préserve l'information du lien le plus fort, pondéré par l'importance du type de relation, elle est simple à calculer et interprétable (un lien fort dans une dimension suffit).

b. Agrégation par somme pondérée

Agrégation par somme pondérée :

$u_{agr}(i, j) = \sum_r(\omega_r \times u_r(i, j))$ avec $\sum_r \omega_r = 1$.

2.1.4. Calcul des proximités successorales

a. Proximité directe et indirecte

La proximité entre deux individus peut être :

Directe : s'ils sont reliés par un arc dans le graphe, on a : $\pi_{dir}(i, j) = M[i, j]$ où M est la matrice d'adjacence globale.

Indirecte : s'ils sont reliés par une chaîne d'arcs, on a : Pour un chemin $C = (i = v_0, v_1, \dots, v_k = j)$, la force du chemin est : $\pi_c(i, j) = T(M[v_0, v_1], M[v_1, v_2], M[v_2, v_3], \dots, M[v_{k-1}, v_k])$ où T est une T-norme.

b. Choix de la T-norme pour les chemins

Deux T-normes principales sont candidates :

T-norme min :

$\pi_c = \min(M[v_{p-1}, v_p])$ avec $p=1 \dots k$, La force du chemin est celle du maillon le plus faible.

T-norme produit : $\pi_c = \prod_{p=1}^k (M[v_{p-1}, v_p])$, La force du chemin diminue avec sa longueur.

c. Proximité globale

La proximité globale entre i et j est la force du meilleur chemin (direct ou indirect) : $\pi(i, j) = \max \pi_c(i, j)$ avec $C \in \mathcal{C}(i, j)$ où $\mathcal{C}(i, j)$ est l'ensemble de tous les chemins de i à j.

d. Fermeture transitive floue

Le calcul de tous les chemins possibles est coûteux. On utilise la fermeture transitive floue pour obtenir directement la matrice des proximités.

La fermeture transitive floue M^∞ de M est définie par : $M^\infty = M \oplus M^2 \oplus M^3 \oplus \dots$

où M^k est la puissance floue (composition max-produit) et \oplus est l'union floue (max).

2.1.5. Score successoral global

Le score successoral global S(h) combine quatre dimensions [17] :

est $S(h) = \alpha \times \pi(d, h) + \beta \times L(h) + \gamma \times D(h) + \delta \times R(h)$

avec :

$\pi(d, h)$: proximité généalogique (issue de la fermeture transitive)

· L(h) : légitimité successorale (facteurs juridiques)

· D(h) : dépendance économique

· R(h) : reconnaissance coutumière

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$: Coefficients de pondération respectifs et $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$.

La normalisation des scores s'effectue par rapport au maximum observé [13] :

$$S_{norm}(h) = \frac{S(h)}{\max_{h' \in H} S(h')}$$

2.2. Paramètres analysés

L'analyse ne dépend pas uniquement des variables d'entrée, mais également des paramètres internes du modèle. Notre analyse porte sur trois catégories de paramètres, ces paramètres incluent les pondérations des relations, les coefficients du score global ainsi que les paramètres des fonctions d'appartenance. [5] :

2.2.1. Pondérations des relations (ω_r)

La sensibilité de la pondération est donnée par la relation $S_{\omega_k} = \frac{\partial Y}{\partial \omega_k}$, avec : $Y = H(X; W, \alpha, \theta)$

Si S_{ω_k} est élevé \rightarrow règle dominante.

si S_{ω_k} faible \rightarrow règle marginale .

ω_k exprime le poids de la relation , $\omega_k \in [0, 0.6]$ et le pas est 0.5 ;Contrainte : $\sum \omega_r = 1$

L'espace admissible est défini par [4] :

$$\theta^* = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_2) \in |0,1|^5, \sum_{r=1}^5 \omega_r = 1\}.$$

2.2.2. Coefficients du score global ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$)

Le score global constitue une synthèse des variables d'entrée pondérées par des coefficients : $SH = \sum_{i=1}^M \alpha_i X_i$, avec $\sum \alpha_i = 1$, pour notre cas, on a : $SH = \sum_{i=1}^5 \alpha_i X_i$, avec $\sum \alpha_i = 1$.

La sensibilité des coefficients est donnée par la relation :

$$S_{\alpha_i} = \frac{\partial SH}{\partial \alpha_i}, \text{ valeur élevée } \rightarrow \text{ forte influence et dominance d'un } \alpha_i \rightarrow \text{ déséquilibre.}$$

Avec α_i : coefficients de pondération des variables d'entrée $\in [0, 1]$ et de contrainte :

$$\sum \alpha_i = 1 (\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1).$$

L'espace admissible est [13] :

$$\theta^* = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in |0,1|^4, \alpha + \beta + \gamma + \delta = 1\}.$$

2.2.3. Paramètres des fonctions d'appartenance

Les fonctions qui présentent des transitions abruptes peuvent engendrer des variations brusques de la sortie pour des faibles modifications des entrées. A l'inverse, des fonctions lisses assurent une transition progressive entre les classes floues, contribuant ainsi à la stabilité du système. Chaque fonction dépend du paramètre θ :

La fonction trapézoïdale dépend de paramètre $\theta = (a, b, c, d)$,

La fonction triangulaire dépend de paramètre $\theta = (a, b, c)$,

La fonction gaussienne dépend du paramètre $\theta = (c, \alpha)$.

La Sensibilité est donnée par : $S_{\theta} = \frac{\partial H}{\partial \theta}$. La forte pente entraîne une instabilité du système.

Pour les variables linguistiques d'entrée, les bornes des fonctions triangulaires sont modulées [3] :

Terme	Paramètres nominaux	Plage de variation
Faible	(a=0, b=0, c=0,4)	c ∈ [0,3, 0,5]
Moyenne	(a=0,2, b=0,5, c=0,8)	b ∈ [0,4, 0,6]
Forte	(a=0,6, b=1, c=1)	a ∈ [0,5, 0,7]

2.3. Indicateurs de sensibilité et de robustesse

2.3.1. Stabilité du classement (rang)

a. Cadre formel

La décision finale dans le modèle flou successoral repose sur un ensemble de paramètres

$P = (W, \alpha, \theta)$. Toute variation de ces paramètres peut influencer non seulement les scores individuels des héritiers, mais également leur ordre de classement.

- La fonction de décision pour chaque héritier i est $Y_i(P) = H(X_i; P)$, où : $P = (W, \alpha, \theta)$ et Y_i le score final(part successorale).
- Le classement final $Y_1(P) \geq Y_2(P) \geq Y_3(P) \geq \dots \geq Y_n(P)$
- Perturbation paramétrique : $P \rightarrow P + \delta P$ et $Y_i \rightarrow Y_i + \delta Y_i$

b. Configurations paramétriques

Soit $P = (P_0, P_1, P_2, \dots, P_m)$ l'ensemble des configurations avec P_0 la configuration initiale du modèle(configuration de référence). La configuration perturbé est $P_k \rightarrow P_0 + \delta P_k$.

Soit F une fonction de classement des héritiers, $F(P)$ = ordre des $Y_i(P)$. Le classement est stable si : $F(P_k) = F(P_0), P_0 \in P$.

L'indice de stabilité dans ce cas est $I_{rank} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \delta(F(P_k), F(P_0))$ avec

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si classement identique} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$I_{rank} = 1$ stabilité totale et $I_{rank} < 1$ instabilité partielle.

c. Analyse par marges décisionnelles

Soient deux héritiers A et B avec $Y_A = H(X_A), Y_B = H(X_B)$. On dit que le classement est stable si : $Y_A > Y_B \rightarrow Y'_A > Y'_B$ après perturbation des paramètres.

L'indicateur de stabilité du classement est $\Delta_{AB} = Y_A - Y_B$ et la condition de stabilité est

$$\Delta_{AB} > |\delta Y_A - \delta Y_B|.$$

Si $\Delta_{AB} \approx 0$, il Ya forte probabilité d'inversion.

Si Soit $H = \{h_1, h_2, h_3, \dots, h_n\}$ l'ensemble des héritiers ordonné par scores normalisés décroissants . Le rang d'un héritier h dans une configuration p est $r(h, p) = 1 + |\{h' \in H: S_{norm}(h', p) > S_{norm}(h, p)\}|$.

d. Corrélation de Spearman pour la stabilité du classement

Le coefficient de corrélation de Spearman entre deux classements est défini par [19] :

$$\rho(p, p') = 1 - \frac{6 \sum_{h \in H} d_h^2}{n(n^2-1)}, \text{ où } d_h = r(h, p) - r(h, p') \text{ et } n = |H|. \text{ le coefficient } \rho \text{ vérifie: } -1 \leq \rho(p, p') \leq 1. \rho = 1:$$

Classement identiques (robustesse maximale) ; $\rho = 0$: Absence de corrélation linéaire entre les rangs ; $\rho = -1$: Classements inverses.

La stabilité globale est mesurée par la moyenne des ρ sur l'ensemble des paires de configurations testées.

e. Coefficient de variation pour la sensibilité des scores

Le coefficient de variation pour chaque héritier h est [20] :

$$CV(h) = \frac{\sigma_{S_{norm}(h)}}{\mu_{S_{norm}(h)}}, \text{ où } \sigma \text{ est l'écart-type et } \mu \text{ la moyenne des scores normalisés sur l'ensemble des configurations}$$

$$\text{et avec } \mu_{S_{norm}(h)} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S_{norm}(h, p_k) \text{ et}$$

$$\sigma_{S_{norm}(h)} = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m (S_{norm}(h, p_k) - \mu_{S_{norm}(h)})^2}$$

Ce seuil s'interprète de la manière suivante :

Plage de CV	Interprétation	Implication
$CV < 0,10$	Très faible sensibilité	Score stable quelle que soit la configuration
$0,10 \leq CV < 0,20$	Faible sensibilité	Score légèrement variable
$0,20 \leq CV < 0,30$	Sensibilité modérée	Score notablement variable
$CV \geq 0,30$	Forte sensibilité	Score très variable, dépend fortement des paramètres

De ces seuils dérive les indicateurs suivants :

La sensibilité moyenne de l'ensemble des héritiers est définie par :

$$\overline{CV} = \frac{1}{n} \sum_{h \in H} CV(h)$$

La sensibilité maximale identifie l'héritier le plus vulnérable aux variations paramétriques :

$$CV_{max} = \max_{h \in H} CV(h) .$$

La sensibilité minimale identifie l'héritier le plus stable :

$$CV_{min} = \min_{h \in H} CV(h) .$$

2.3.2. Seuils d'inversion

a. Définition

Le seuil d'inversion est la valeur critique d'un paramètre pour laquelle deux héritiers échangent leurs positions dans le classement.

Pour un paramètre θ variant continûment, le seuil d'inversion θ^* est la valeur telle que :

$$\exists (h_1, h_2) \in H^2, \quad r(h_1, \theta < \theta^*) < r(h_2, \theta < \theta^*) \text{ et } r(h_1, \theta > \theta^*) > r(h_2, \theta > \theta^*)$$

Soit $\theta \in [\theta_{min}, \theta_{max}]$ un paramètre continu du modèle, les autres paramètres étant fixés à leurs valeurs nominales.

Pour deux héritiers h_1 et h_2 , le seuil d'inversion $\theta^*(h_1, h_2)$ est défini par :

$$\theta^*(h_1, h_2) = \{\theta \in [\theta_{min}, \theta_{max}], S_{norm}(h_1, \theta) = S_{norm}(h_2, \theta)\} .$$

Lorsque les fonctions de score sont strictement monotones en fonction de θ , ce seuil est unique.

b. Calcul numérique du seuil d'inversion

Pour un paramètre θ variant discrètement avec un pas $\Delta\theta$, le seuil d'inversion est approximé par :

$$\theta^*(h_1, h_2) = \theta_k + \frac{S_{norm}(h_2, \theta_k) - S_{norm}(h_1, \theta_k)}{(S_{norm}(h_1, \theta_{k+1}) - S_{norm}(h_1, \theta_k)) - (S_{norm}(h_2, \theta_{k+1}) - S_{norm}(h_2, \theta_k))} \times \Delta\theta, [6] :$$

2.3.3. Indicateurs complémentés

a. Variation relative moyenne

Pour un paramètre θ variant sur un intervalle $[\theta_{min}, \theta_{max}]$, la variation relative moyenne du score de l'héritier h est définie par :

$$\Delta_{rel}(h) = \frac{1}{\theta_{max} - \theta_{min}} \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \left| \frac{dS_{norm}(h, \theta)}{d\theta} \right| d\theta \times (\theta_{max} - \theta_{min})$$

Cet indicateur mesure la sensibilité globale du score de l'héritier h au paramètre θ .

b. Indice de sensibilité de Sobol (premier ordre)

Pour une analyse de sensibilité globale plus avancée, nous utilisons l'indice de Sobol du premier ordre, qui mesure la contribution de chaque paramètre à la variance de la sortie :

$$S_i = \frac{\text{Var}_{\theta_i} | E_{\theta_i}(S_{norm} | \theta_i) |}{\text{Var}(S_{norm})}$$

c. **Coefficient de corrélation de Pearson**

Pour compléter l'analyse, nous utilisons également le coefficient de corrélation de Pearson entre le paramètre θ et le score $S_{norm}(h)$:

$$r_P(h, \theta) = \frac{\text{Cov}(S_{norm}(h), \theta)}{\sigma_{S_{norm}(h)} \sigma_{\theta}}$$

Contrairement au coefficient de Spearman qui capture les relations monotones, le coefficient de Pearson mesure les relations linéaires.

2.4. Cas d'étude

2.4.1. Cas Mwambutsa (Bukavu)

Caractéristique Valeur

Lieu Bukavu, Sud-Kivu

Patrimoine total 85 000 USD

Nombre d'héritiers 6

Profil Famille patrilinéaire urbaine [10]

2.4.2. Cas Nzuzi Matondo (Kinshasa)

Caractéristique Valeur

Lieu Kinshasa

Nombre d'héritiers 12

Profil Système mixte (patrilinéaire/matrilinéaire) [21]

2.5. Protocole expérimental

L'exploration de l'espace paramétrique suit une procédure systématique [5] :

1. Variation des ω_r : 1 000 configurations aléatoires (méthode de Dirichlet)
2. Variation des $\alpha, \beta, \gamma, \delta$: 1 000 configurations aléatoires
3. Variation des fonctions d'appartenance : 125 combinaisons discrètes
4. Scénarios interprétables : 5 scénarios prédéfinis

3. RÉSULTATS

3.1. Sensibilité aux pondérations des relations (ω_r)

3.1.1. Cas Mwambutsa

Tableau 1 : Coefficient de variation CV(h) des scores normalisés

Héritier	Profil	CV(h)	Interprétation
Marie	Fille biologique , dépendante	0,08	Très faible sensibilité
Jean	Fils biologique, autonome	0,11	Faible sensibilité
Chantal	Épouse coutumière	0,14	Sensibilité modérée
Alain	Neveu-fils (filiation sociale)	0,22	Forte sensibilité
Clarisse	Nièce hébergée	0,16	Sensibilité modérée
Joseph	Cousin	0,18	Sensibilité modérée

Analyse : Alain présente la sensibilité la plus élevée ($CV = 0,22$), ce qui s'explique par son profil hybride : ses liens sont principalement de type social (R_2) et coutumier (R_5), dont les poids varient considérablement [3]. À l'inverse, Marie et Jean, bénéficiant de liens biologiques forts ($R_1 = 1,0$), conservent des scores stables quelle que soit la pondération des autres relations.

3.1.2. Cas Nzuzi Matondo

Tableau 2 : Héritiers les plus sensibles aux variations des ω_r ($CV > 0,20$)

Héritier	Profil	CV(h)	Facteur explicatif
Yves	Fils non reconnu (filiation sociale)	0,31	Dépendance forte à R_2
Oncle Joseph	Oncle paternel (rôle social)	0,27	Influence de R_5
Hélène	Épouse coutumière non consommée	0,24	Statut ambigu, dépendance à R_3 et R_5
Koffi	Ami / père spirituel	0,23	Absence de R_1 , dépendance à R_2 et R_4

Analyse : Les héritiers dont la légitimité repose exclusivement ou majoritairement sur des relations sociales (R_2) ou coutumières (R_5) présentent une sensibilité accrue [9]. Ce résultat est cohérent avec la plus grande variabilité normative de ces catégories de liens dans le contexte congolais.

3.2. Sensibilité aux coefficients du score global ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$)

3.2.1. Stabilité du classement

Tableau 3 : Matrice de corrélation de Spearman entre scénarios prédéfinis

Scénario	Référence	Civil pur	Coutume	Médiation
----------	-----------	-----------	---------	-----------

Référence	1,00	0,85	0,78	0,92
Civil pur	0,85	1,00	0,52	0,79
Coutume	0,78	0,52	1,00	0,81
Médiation	0,92	0,79	0,81	1,00

Analyse : La faible corrélation entre les scénarios « Civil pur » et « Coutume » ($\rho = 0,52$) reflète l'opposition fondamentale entre les deux systèmes normatifs [9]. Le scénario de médiation, en revanche, présente une forte corrélation avec le scénario de référence ($\rho = 0,92$), validant a posteriori le choix des pondérations initiales.

3.2.2. Évolution des scores en fonction de δ

Soit une variation continue de δ de 0 à 1, avec $\alpha = (1-\delta)/2$, $\beta = (1-\delta)/4$, $\gamma = (1-\delta)/4$ (maintien des rapports entre α , β , γ).

Seuil d'inversion : $\delta^* \approx 0,72$. Pour $\delta < 0,72$, Marie est classée première ; pour $\delta > 0,72$, Chantal devient première [6]. Ce seuil constitue une information précieuse pour la médiation : les parties sachant que leur position est privilégiée selon que l'on accorde plus ou moins de poids à la coutume.

3.3. Sensibilité aux fonctions d'appartenance

Tableau 4 : Impact de la variation des bornes de la fonction « Parenté forte »

Borne a (début)	Score $S_{norm}(\text{Jean})$	Variation
0,50	0,892	+1,9%
0,55	0,883	+0,9%
0,60	0,875	0%
0,65	0,864	-1,3%
0,70	0,851	-2,7%

Analyse : La sensibilité aux bornes des fonctions d'appartenance est modérée (variation maximale de $\pm 3\%$ pour des écarts de $\pm 0,10$ sur la borne) [3]. Cette relative robustesse est rassurante pour l'application pratique : une incertitude raisonnable sur la calibration des fonctions d'appartenance n'altère pas significativement les conclusions.

3.4. Synthèse des résultats

Tableau 5 : Synthèse des indicateurs de sensibilité

Catégorie de paramètre	Stabilité classement (moyen)	ρ	Sensibilité score (CV moyen)	Présence seuils inversion
ω_r (poids relations)	0,89		0,15	Oui
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (coefficients)	0,82		0,22	Oui ($\delta^* = 0,72$)

Fonctions d'appartenance 0,94 0,06 Non

4. DISCUSSION

4.1. Interprétation des résultats

Trois enseignements majeurs se dégagent de cette analyse [5] :

Premièrement, la robustesse du classement. Malgré des variations paramétriques importantes, le classement relatif des héritiers reste stable dans plus de 85% des configurations testées. Cette propriété est essentielle pour l'acceptabilité du modèle [15].

Deuxièmement, l'identification des profils sensibles. Certains héritiers, ceux dont la légitimité repose sur des liens sociaux (R_2) ou coutumiers (R_5), présentent une sensibilité accrue. Cette observation n'est pas une faiblesse du modèle, mais plutôt la formalisation d'une réalité anthropologique documentée par Mbiti [12] et Lévi-Strauss [22].

Troisièmement, l'utilité pratique des seuils d'inversion. L'identification d'un seuil critique pour δ (poids de la coutume) offre un levier objectif pour la médiation [6]. Les parties peuvent constater que leur différend se réduit à une question de pondération relative entre deux systèmes normatifs, plutôt qu'à une opposition irréductible sur les faits.

4.2. Implications pour la médiation successorale

L'analyse de sensibilité transforme le système expert d'un simple calculateur en un outil de négociation [17]. Le médiateur peut [18] :

1. Objectiver le désaccord en montrant aux parties que leurs positions correspondent à des pondérations différentes des mêmes critères
2. Identifier les points de blocage en repérant les héritiers dont le classement est sensible aux variations paramétriques
3. Proposer des compromis en explorant des scénarios intermédiaires qui offrent un équilibre acceptable pour tous

4.3. Proposition d'un protocole de calibration

Sur la base des résultats obtenus, nous proposons un protocole de calibration en deux étapes [23] :

Étape 1 : Calibration par consensus d'experts (méthode Delphi)

- Tour 1 : Chaque expert propose ses propres pondérations ($\omega_r, \alpha, \beta, \gamma, \delta$)
- Tour 2 : Les experts prennent connaissance des propositions des pairs et révisent leurs valeurs
- Tour 3 : Calcul de la médiane ou de la moyenne des valeurs après stabilisation

Étape 2 : Calibration automatique (perspective de recherche)

Utilisation d'algorithmes génétiques pour optimiser les paramètres à partir d'une base de cas résolus [24] :

4.4. Limites de l'étude

Plusieurs limites doivent être reconnues [5] :

1. Taille de l'échantillon : L'analyse repose sur deux cas seulement. Une validation sur un plus grand nombre de successions ($n \geq 20$) serait nécessaire
2. Absence de validation externe : Les seuils d'inversion identifiés n'ont pas été confrontés à des décisions judiciaires ou des accords de médiation réels

4.5. Perspectives de recherche

Les développements futurs incluront [17], [24] :

- La calibration automatique par algorithmes génétiques ou apprentissage supervisé
- L'extension à la logique floue de type 2 pour modéliser l'incertitude sur les paramètres eux-mêmes [25]
- Le développement d'une interface interactive permettant aux médiateurs d'explorer visuellement l'espace paramétrique en temps réel.

5. CONCLUSION

Cet article a présenté une analyse systématique de la sensibilité et de la robustesse d'un modèle flou successoral développé pour le contexte congolais [5], [6]. Les principaux résultats peuvent être résumés comme suit :

1. Robustesse générale : Le classement relatif des héritiers est stable (ρ moyen $> 0,85$) pour l'essentiel de l'espace paramétrique [19].
2. Sensibilité ciblée : Seuls certains héritiers aux profils hybrides (filiation sociale, reconnaissance coutumière) présentent une sensibilité élevée ($CV > 0,20$), reflétant fidèlement l'incertitude réelle de ces statuts [20].
3. Seuils d'inversion identifiés : La mise en évidence d'un seuil critique pour δ (poids de la coutume) à 0,72 offre un outil concret pour la médiation [6].
4. Protocole de calibration proposé : L'articulation d'une méthode Delphi et d'une optimisation automatique ouvre une voie prometteuse pour l'opérationnalisation du modèle [23], [24].

Sur le plan théorique, cette étude contribue à la littérature sur la calibration des systèmes experts flous dans les domaines socialement sensibles [4], [17]. Sur le plan pratique, elle fournit aux médiateurs et aux notaires un outil d'aide à la décision à la fois transparent, robuste et flexible [15], [18].

Les travaux futurs s'orienteront vers l'extension de l'analyse à un plus grand nombre de cas, l'intégration de la dimension temporelle (évolution des liens familiaux), et le développement d'une interface de visualisation interactive de l'espace paramétrique.

6. RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] L. A. Zadeh, "Fuzzy sets," *Information and Control*, vol. 8, no. 3, pp. 338-353, 1965.
- [2] E. H. Mamdani and S. Assilian, "An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller," *International Journal of Man-Machine Studies*, vol. 7, no. 1, pp. 1-13, 1975.

- [3] D. Dubois and H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. New York: Academic Press, 1980.
- [4] G. J. Klir and B. Yuan, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1995.
- [5] A. Saltelli, M. Ratto, T. Andres, F. Campolongo, J. Cariboni, D. Gatelli, M. Saisana, and S. Tarantola, *Global Sensitivity Analysis: The Primer*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2008.
- [6] F. Campolongo, A. Saltelli, and J. Cariboni, "From screening to quantitative sensitivity analysis," *Environmental Modelling & Software*, vol. 26, no. 10, pp. 1133-1144, 2011.
- [7] R. Melynda, A. C. Anam, M. Tohir, and M. Atikurrahman, "Application of the Fuzzy Logic Mamdani Method in Determining Inheritance Rights of Adopted Children," in *Proc. International Conference on Neuroscience and Learning Technology (ICONSATIN 2025)*, 2025, pp. 397-411.
- [8] T. J. Ross, *Fuzzy Logic with Engineering Applications*, 3rd ed. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2010.
- [9] P. Kasongo, "Les conflits successoraux et les modalités de leur résolution en Droit congolais," *Revue Congolaise de Droit*, vol. 4, no. 2, pp. 78-95, 2022.
- [10] J. Mbuyi, *Droit coutumier et succession en Afrique centrale : entre tradition et modernité*. Kinshasa: Éditions Universitaires Africaines, 2016.
- [11] J. Ngoma, *Le pluralisme juridique en RDC : Défis et perspectives*. Kinshasa: P.U.C., 2008.
- [12] J. Mbiti, *African Religions and Philosophy*. Nairobi: East African Publishing House, 1969.
- [13] T. J. Ross, *Fuzzy Logic with Engineering Applications*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2010.
- [14] T. Bench-Capon, *Knowledge-Based Systems and Legal Applications*. London: Academic Press, 1991.
- [15] E. Turban and J. E. Aronson, *Decision Support Systems and Intelligent Systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2001.
- [16] P. Kalonji and M. Tshibanda, "Approche floue pour la répartition équitable des biens successoraux en Afrique Centrale," *Revue Congolaise de Droit et Technologies*, vol. 4, no. 2, pp. 78-95, 2020.
- [17] F. Karray and C. De Silva, *Soft Computing and Intelligent Systems Design: Theory, Tools, and Applications*. Boston: Addison Wesley, 2004.
- [18] P. Ngoma, *La coutume et le droit moderne : essai sur les mutations du droit africain*. Paris: Karthala, 2014.
- [19] C. Spearman, "The proof and measurement of association between two things," *American Journal of Psychology*, vol. 15, no. 1, pp. 72-101, 1904.
- [20] K. Pearson, "Mathematical contributions to the theory of evolution. III. Regression, heredity, and panmixia," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 187, pp. 253-318, 1896.

- [21] J. Vansina, *The Children of Woot: A History of the Kuba Peoples*. Madison: University of Wisconsin Press, 1978.
- [22] C. Lévi-Strauss, *Anthropologie structurale*. Paris: Plon, 1958.
- [23] N. Dalkey and O. Helmer, "An experimental application of the Delphi method to the use of experts," *Management Science*, vol. 9, no. 3, pp. 458-467, 1963.
- [24] H. Kalia, S. Dehuri, and A. Ghosh, "Fitness inheritance in multi-objective genetic algorithms: a case study on fuzzy classification rule mining," *International Journal of Advanced Intelligence Paradigms*, vol. 23, no. 1/2, pp. 89-112, 2022.
- [25] L. A. Zadeh, "The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning," *Information Sciences*, vol. 8, no. 3, pp. 199-249, 1975.

**Copyright & License:**

© Authors retain the copyright of this article. This work is published under the Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0), permitting unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.